2 Liczby rzeczywiste - cz. 2

W tej lekcji omówimy pozostałe tematy związane z liczbami rzeczywistymi.

2.1 Przedziały liczbowe

Wyróżniamy następujące rodzaje przedziałów liczbowych:

(a) przedziały ograniczone:

- przedział otwarty $(a;b)$ — jest to zbiór złożony z wszystkich liczb x większych od a i mniejszych od b: $a < x < b$,
- przedział domknięty $\langle a;b\rangle$ — jest to zbiór złożony z wszystkich liczb x większych lub równych a i mniejszych lub równych b: $a \leq x \leq b$,
- przedział lewostronnie otwarty i prawostronnie domknięty $(a;b\rangle$ — jest to zbiór złożony z wszystkich liczb x większych od a i mniejszych lub równych b: $a < x \leq b$,
- przedział lewostronnie domknięty i prawostronnie otwarty $\langle a;b)$ — jest to zbiór złożony z wszystkich liczb x większych lub równych a i mniejszych od b: $a \leq x < b$;

(b) przedziały nieograniczone:

- prawostronnie otwarty $(-\infty;a)$ — jest to zbiór złożony z wszystkich liczb x mniejszych od a: $x < a$,
- prawostronnie domknięty $(-\infty;a\rangle$ — jest to zbiór złożony z wszystkich liczb x mniejszych lub równych a: $x \leq a$,
- lewostronnie otwarty $(a;+\infty)$ — jest to zbiór złożony z wszystkich liczb x większych od a: $x > a$,
- lewostronnie domknięty $\langle a;+\infty)$ — jest to zbiór złożony z wszystkich liczb x większych lub równych a: $x \geq a$.

Przykład. Przedział $\langle -4;9)$ jest przedziałem ograniczonym, lewostronnie domkniętym i prawostronnie otwartym, składającym się z wszystkich liczb większych lub równych -4 i mniejszych od 9. Zaznaczając go na osi liczbowej, zamalowujemy punkt -4, a punkt 9 zakreślamy otwartym kółkiem.

2.2 Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej x to fukcja oznaczana symbolem $|x|$ i określona następująco:

$$|x| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Interpretacja geometryczna: Wartość bezwzględna liczby x to odległość liczby x od 0 na osi liczbowej. Ściślej mówiąc, jest to odległość punktu o współrzędnej x od punktu o współrzędnej 0. $|a-b|$ jest to odległość liczby a od liczby b na osi liczbowej. Ściślej mówiąc, jest to odległość punktu o współrzędnej a od punktu o współrzędnej b.

Przykład 1. Znajdziemy zbiór wszystkich liczb x spełniających równanie $|x-4|=3$.

$$|x-4|=3 \Longleftrightarrow \text{odległość liczby } x \text{ od liczby 4 na osi liczbowej jest równa 3} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x=4-3 \text{ lub } x=4+3 \Longleftrightarrow x\in\{1,7\}.$$

Przykład 2. Znajdziemy zbiór wszystkich liczb x spełniających nierówność $|x-4|>3$.

$$|x-4|>3 \Longleftrightarrow \text{odległość liczby } x \text{ od liczby 4 na osi liczbowej jest większa od 3} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x<4-3 \text{ lub } x>4+3 \Longleftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(7;+\infty).$$

Przykład 3. Znajdziemy zbiór wszystkich liczb x spełniających nierówność $|x-4|<3$.

$$|x-4|<3 \Longleftrightarrow \text{odległość liczby } x \text{ od liczby 4 na osi liczbowej jest mniejsza od 3} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x>4-3 \text{ i } x<4+3 \Longleftrightarrow x\in(1;7).$$

Uwaga.

$$\sqrt{x^2}=|x| \quad (\text{nie } x\ !).$$

Na przykład $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=|-5|\neq -5$.

2.3 Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych

Każda liczba rzeczywista posiada swoje rozwinięcie dziesiętne. Na przykład

$$\frac{1}{2}=0,5,$$

czyli 0,5 jest rozwinięciem dziesiętnym liczby $\frac{1}{2}$ lub — inaczej mówiąc — zapisem liczby $\frac{1}{2}$ w postaci dziesiętnej.
Rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych najłatwiej wyznaczyć, dzieląc licznik przez mianownik sposobem pisemnym. Liczby wymierne mogą mieć rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe.

Przykłady liczb wymiernych mających rozwinięcie skończone:

$$\frac{1}{2}=0,5; \quad -\frac{7}{4}=-1,75; \quad \frac{3}{1000}=0,003.$$

Przykłady liczb niewymiernych mających rozwinięcie nieskończone okresowe:

$$\frac{1}{3}=0,33333....=0,(3); \quad \frac{1}{11}=0,090909....=0,(09); \quad \frac{1}{13}=0,076923076923....=0,(076923).$$

Wszystkie liczby niewymierne mają rozwinięcie nieskończone nieokresowe. Przykłady:

$$\sqrt{2}=1,414213562...; \quad \sqrt{3}=1,732050808...; \quad \sqrt[3]{2}=1,25992105...; \quad \sqrt[17]{30}=1,22148879...$$

Szczególnym przykładem liczby niewymiernej jest liczba π, której rozwinięcie dziesiętne wynosi:

$$\pi=3,141592654....$$

Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych.
Ułamki dziesiętne można zaokrąglać np. do dwóch, trzech, czterech (lub innej liczby) miejsc po przecinku. Stosujemy przy tym następujące zasady:

- jeśli pierwsza z odrzucanych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest mniejsza od 5 (czyli jest równa $0, 1, 2, 3$ lub 4), to ostatnią zachowaną cyfrę pozostawiamy bez zmian, np. $5,36741 \approx 5,367$;
- jeśli pierwsza z odrzucanych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest większa lub równa 5 (czyli jest równa $5, 6, 7, 8$ lub 9), to ostatnią zachowaną cyfrę zwiększamy o 1, np. $5,36741 \approx 5,37$.

Definicja błędu przybliżenia.

- Błąd przybliżenia jest to różnica między przybliżeniem danej liczby, a dokładną wartością tej liczby. Jeśli błąd jest liczbą ujemną, to mówimy o **przybliżeniu z niedomiarem**, jeśli zaś jest liczbą dodatnią, to mówimy o **przybliżeniu z nadmiarem**. Na przykład dla przybliżenia $5,36741 \approx 5,367$ błąd jest równy $5,367 - 5,36741 = -0,00041$, czyli przybliżenie jest z niedomiarem. Natomiast dla przybliżenia $5,36741 \approx 5,37$ błąd jest równy $5,37 - 5,36741 = 0,00259$, czyli przybliżenie jest z nadmiarem.
- Błąd bezwzględny jest to wartość bezwzględna błędu przybliżenia. Na dla przybliżenia $5,36741 \approx 5,367$ błąd bezwzględny jest równy $|5,367 - 5,36741| = |-0,00041| = 0,00041$
- Błąd względny jest to iloraz błędu bezwzględnego do wartości bezwzględnej przybliżenia, tzn. jeśli liczba a jest przybliżeniem liczby x, to błędem względnym jest liczba $|\frac{a-x}{a}|$. Na przykład dla przybliżenia $5,367 \approx 5,4$ błąd względny jest równy $|\frac{5,4-5,367}{5,4}| \approx 0,00611$.

2.4 Wzory skróconego mnożenia

Wyróżniamy następujące tzw. wzory skróconego mnożenia:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Przykłady

(a) $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 3y + 3\cdot 2x\cdot(3y)^2 - (3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$,

(b) $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2) = x(x-3)^2$,

(c) wzory skróconego mnożenia pomagają również wykonywać niektóre obliczenia w pamięci, bez pomocy kalkulatora. Na przykład:

- $102\cdot 98 = (100+2)\cdot(100-2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$,
- $83^2 = (80+3)^2 = 80^2 + 2\cdot 3\cdot 80 + 3^2 = 6400 + 480 + 9 = 6889$.

2.5 Zadania do rozwiązania

1. Liczba $\sqrt{2}-2$ należy do przedziału:
   A. $\langle 0;1)$ B. $\langle -\frac{1}{2};\frac{1}{2}\rangle$ C. $(-1;0)$ D. $(1;2\rangle$

2. Znajdź przedział, który jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{4}+\frac{1}{6}<\frac{x}{3}$.

3. Oblicz:

   (a) $|3|$,
   (b) $|-\pi|$,
   (c) $|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-3|$,
   (d) $|\sqrt{18}-5|-|\sqrt{19}-3\sqrt{2}|$,
   (e) $\sqrt{(-11)^2}$,
   (f) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$,
   (g) $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$.

4. Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów zbiór rozwiązań nierówności $4x^2 \geq 36$.

5. Wskaż nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -2;4\rangle$.
   A. $|x-1|\leq 4$ B. $|x-1|\geq 3$ C. $|x+1|\geq 5$ D. $|x-1|\leq 3$

6. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności $|2-x|\geq 3$.

7. Policz na kalkulatorze liczby $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\pi$ i podaj je z dokładnością do dwóch, trzech i czterech miejsc po przecinku.

8. Ile wyniesie błąd bezwzględny, a ile błąd względny przy zaokrągleniu liczby $\frac{2}{3}$ do jednego miejsca po przecinku?

9. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$.

10. Udowodnij, że jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2+y^2\geq 2xy$.

11. Rozwiń wyrażenie $(3x-4)^3$ do postaci bez nawiasów.

12. Różnica $4x^2-5$ jest równa iloczynowi:
    A. $(2x-5)(2x+5)$ B. $(2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})$ C. $(2x-\sqrt{5})(2x-\sqrt{5})$ D. $(4x-5)(4x+5)$

13. Dane wyrażenie doprowadź do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla podanych wartości x, y:

    (a) $2(3x-y)^2-3(2x+y)(y-2x)+12xy$; $x=\sqrt{2}$; $y=-3\sqrt{6}$;
    (b) $(2y-x)(x+2y)-(x-2y)^2$; $x=-3,6$; $y=3\frac{1}{5}$.

Po tej lekcji powinieneś umieć:

- wyznaczać rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych;

- znajdować przybliżenia liczb z określoną dokładnością i wykorzystywać pojęcie błędu przybliżenia;
- posługiwać się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznaczać przedziały na osi liczbowej;
- wykorzystywać pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną;
- zaznaczać na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą prostych równań i nierówności z wartością bezwzględną;
- posługiwać się wzorami skróconego mnożenia.